УДК 517.4

М. В. Кретов, В. С. Малаховский
В. И. Семёнов, В. Н. Худенко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРАМИ

Продолжается исследование почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве. Вводится понятие мультипликатора, с помощью которого доказана теорема об интеграле от почти периодической функции.

Research of almost periodic functions with values in Banach space proceeds. The concept of the multiplicator by means of which the theorem of integral from almost periodic function is proved is entered.

Ключевые слова: почти периодическая функция, банахово пространство, мультипликатор, ряд Фурье.

Key words: almost periodic function, Banach space, multiplicator, Fourier series.

В работе продолжается исследование почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве [1—4].

Пусть заданы комплекснозначная функция Γ (λ) (λ — вещественное число) и почти периодическая функция $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E [5]. Будем предполагать, что функции $f(t)$ соответствует ряд Фурье [6] $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n t}$, где a_{λ_n} — элемент из банахова пространства E.

Определение 1. Функцию Γ (λ) назовем *мультипликатором для почти периодической функции* $f(t)$, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(\lambda_n) a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n t}$ является рядом Фурье некоторой почти периодической функции $f_\Gamma(t)$.

Мультипликаторы обладают следующими свойствами.

1. Сумма конечного числа мультипликаторов для функции $f(t)$ является мультипликатором для этой функции.

2. Если две функции $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma_2(\lambda)$ на спектре функции [7] $f(t)$ совпадают, то они обе одновременно являются или не являются мультипликаторами. В этом случае мультипликаторы $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma_2(\lambda)$ называют *эквивалентными относительно почти периодической функции* $f(t)$.

Определение 2. Функцию Γ (λ), являющуюся мультипликатором для любой почти периодической функции, назовем *общим мультипликатором*.

Замечание. Произведение двух общих мультипликаторов $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma_2(\lambda)$ есть также общий мультипликатор.

Теорема 1. *Пусть функция* Γ (λ) *непрерывно дифференцируема и обращается в нуль при* $|\lambda| \geqslant \alpha$, $\alpha > 0$. *Тогда* Γ (λ) *— общий мультипликатор.*

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} \Gamma(\lambda) d\lambda \tag{1}$$

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 4. С. 106 – 109.

и определим функцию $F(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda(s-t)f(s)\,ds=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda(s)f(s+t)\,ds.$

Покажем, что функция $F(t)$ существует. Для этого достаточно показать, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Lambda(s)|\,ds$ ограничен. Легко видеть, что интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Gamma(\lambda)|^2\,d\lambda$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Gamma'(\lambda)|^2\,d\lambda$ конечны. Положим $\Lambda_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-it\lambda}\Gamma'(\lambda)d\lambda.$

Проинтегрируем интеграл $\Lambda_1(t)$ по частям, получим

$$\Lambda_1(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot it\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-it\lambda}\Gamma(\lambda)d\lambda, \tag{2}$$

значит, $\Lambda(t)=\frac{1}{it}\Lambda_1(t).$ Из (1) и (2) следует $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Lambda(t)|^2\,dt<\infty,$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Lambda_1(t)|^2\,dt<\infty.$

Согласно неравенству Шварца, имеют место следующие соотношения:

$$\left(\int\limits_{1}^{\infty}|\Lambda(t)|\,dt\right)^2\leqslant\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\int\limits_{1}^{\infty}|\Lambda_1(t)|^2dt,\quad\left(\int\limits_{-\infty}^{-1}|\Lambda(t)|\,dt\right)^2\leqslant\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dt}{t^2}\int\limits_{-\infty}^{-1}|\Lambda_1(t)|^2dt,$$

поэтому интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Lambda(s)|\,ds$ существует.

Покажем, что $F(t)=f_\Gamma(t)$. Из формулы обращения преобразования Фурье вытекает, что при любом значении λ справедливо равенство $\Gamma(\lambda)a_\lambda e^{i\lambda t}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}a_\lambda e^{i\lambda(s+t)}\Lambda(s)\,ds,$ откуда $F(t)=p_\Gamma(t)$, если $p(t)=\sum\limits_{n=1}^{k}a_{\lambda_n}e^{i\lambda_n t}$ $(k<\infty)$.

Пусть теперь $f(t)$ — произвольная почти периодическая функция. Рассмотрим последовательность полиномов $p_n(t)$, равномерно сходящуюся к функции $f(t)$. Тогда будет выполняться неравенство

$$\|F(t)-p_{n\Gamma}(t)\|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|f(t+s)-p_n(t+s)\|\,|\Lambda(s)|\,ds\leqslant k\cdot\varepsilon,$$

следовательно, последовательность $p_{n\Gamma}(t)$ равномерно сходится к функции $F(t)$. Ряд Фурье функции $p_{n\Gamma}(t)$ образуется из ряда Фурье функции $p_n(t)$ с помощью умножения на $\Gamma(\lambda)$. В силу равномерной сходимости ряд Фурье функции $F(t)$ тоже будет получаться из ряда Фурье функции $f(t)$ с помощью умножения на $\Gamma(\lambda)$, что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Пусть функция* $\Gamma(\lambda)$ *непрерывно дифференцируема в отрезке* $[\alpha,\beta]$. *Тогда* $\Gamma(\lambda)$ *является мультипликатором для каждой почти периодической функции, спектр которой лежит в указанном отрезке.*

Доказательство. Продолжим функцию $\Gamma(\lambda)$ так, чтобы она оставалась непрерывно дифференцируемой и обращалась в нуль вне некоторого интервала, содержащего отрезок $[\alpha,\beta]$. Тогда из теоремы 1 вытекает, что построенная функция $\Gamma_1(\lambda)$ является общим мультипликатором.

Утверждение следствия следует из того, что $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma(\lambda)$ эквивалентны по отношению к любой почти периодической функции $f(t)$, спектр которой лежит в отрезке $[\alpha,\beta]$, так как на $[\alpha,\beta]$ они совпадают. □

Следствие 2. *Пусть* $\Gamma(\lambda)$ – *общий мультипликатор, определенный по теореме 1. Тогда функция* $\Lambda(t)$ *дифференцируема любое число раз.*

Доказательство. Дифференцируя формально функцию (1), получим $\Lambda'(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}(-i\lambda)\Gamma(\lambda)\,d\lambda$. Легко показать, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Lambda'(t)\right| dt$ конечен, поэтому из формулы $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda(s-t)f(s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda(s)f(s+t)\,ds$ получим $f_\Gamma'(t) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda'(s-t)f(s)\,ds.$

Из свойств преобразования Фурье вытекает, что

$$\lim_{|t|\to\infty}\Lambda(t) = 0,\ \ \lim_{|t|\to\infty}\Lambda'(t) = 0. \tag{3}$$

Если $f(t)$ обладает почти периодической производной, то, интегрируя $f_\Gamma'(t)$ по частям и учитывая формулы (3), получим

$$f_\Gamma'(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda(s-t)f'(s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Lambda(s)f'(s+t)\,ds, \text{ или } \frac{d}{dt}\left\{f_\Gamma(t)\right\} = \left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}_\Gamma. \ \square$$

Следствие 3. *Функция* $\Gamma(\lambda)$ – *общий мультипликатор, если она непрерывно дифференцируема, а* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma(\lambda)\right|^2 d\lambda$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma'(\lambda)\right|^2 d\lambda$ *конечнозначны.*

Доказательство. Существование интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma(\lambda)\right|^2 d\lambda$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma'(\lambda)\right|^2 d\lambda$ вытекает из $\Gamma(\lambda) = 0(|\lambda|^{-1})$ при $|\lambda|\to\infty$, $\Gamma'(\lambda) = 0(|\lambda|^{-1})$ при $|\lambda|\to\infty$. $\square$

Из теоремы 1 и ее следствий легко следует известная для скалярных функций теорема Фавара [8].

Теорема 2. *Пусть дана почти периодическая функция f (t) со значениями в банаховом пространстве E. Ей соответствует ряд Фурье* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$. *Если* $|\lambda_n| > a > 0$, *то* $F(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$ *является почти периодической функцией.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию

$$\Gamma(\lambda) = \begin{cases}\phi(\lambda), \text{ если } |\lambda| \in (-\infty, a],\\ 1/(i\lambda), \text{ если } |\lambda| \in [a, \infty),\end{cases}$$

где $\phi(\lambda)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[-a, a]$ и $\phi(a) = 1/(ia)$, причем $\Gamma(\lambda) = 0(|\lambda|^{-1})$ при $|\lambda|\to\infty$, $\Gamma'(\lambda) = 0(|\lambda|^{-2})$ при $|\lambda|\to\infty$, следовательно, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma(\lambda)\right|^2 d\lambda$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma'(\lambda)\right|^2 d\lambda$ конечны, поэтому функция $\Gamma(\lambda)$ является общим мультипликатором для функции $f(t)$, значит, ряду Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{i\lambda_n} a_n e^{i\lambda_n t}$ соответствует почти периодическая функция. Этот ряд является рядом Фурье функции $F(t)$, следовательно, функция $F(t)$ — почти периодическая. Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту № 12-01-00477а.

Список литературы

1. *Кретов М. В.* О почти периодических функциях со значениями в банаховом пространстве // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2010. Вып. 4. С. 162—166.

2. *Кретов М. В., Виноградова Н. В., Воротникова О. В.* О почти периодичности преобразования Бахнера // Там же. Вып. 10. С. 160—162.

3. *Кретов М. В.* О приближении почти периодической функции со значениями в банаховом пространстве // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2012. Вып. 4. С. 148—150.

4. *Кретов М. В., Лейцин В. Н., Малаховский В. С., Семенов В. И.* Математическое моделирование почти периодической функции конусами банахова пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Вып. 10. С. 141—143.

5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1968.

6. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Т. 3. М., 2003.

7. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М., 1962.

8. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М., 1953.

Об авторах

Михаил Васильевич Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: kretov20062006@yandex.ru

Владислав Степанович Малаховский — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: nikolaymal@mail.ru

Владимир Иосифович Семёнов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: visemenov@rambler.ru

Владимир Николаевич Худенко — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: vkhudenko@tis-dialog.ru

About authors

Dr Michail Kretov — ass. prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: kretov20062006@yandex.ru

Prof. Vladislav Malakhovsky — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: nikolaymal@mail.ru

Prof. Vladimir Semenov — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: visemenov@rambler.ru

Dr Vladimir Khudenko — ass. prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: vkhudenko@tis-dialog.ru